

فصل: الجبر البولياني

Chapter: Boolean Algebra

الجبر البولياني Boolean Algebra

1- مقدمة Introduction: تم اكتشاف هذا النوع من الجبر عبر ابحاث وكتاب الفه العالم الرياضي جورج بول (George Boole) وكان الكتاب بعنوان " طرائق التفكير " وذلك عام 1854 وكان لهذا الكتاب الفضل الكبير في تطوير الحواسيب في العالم، حيث استخدمه العالم شانون بعد قرن من الزمن باستعمال الجبر البولياني في تحليل الدارات الكهربائية و تمثيل المنطقية وما زال التطوير واستخدام تطبيقات الجبر البولياني مستمراً إلى يومنا هذا.

2- جبر أجزاء مجموعة Set Parts Algebra

تعريف (مجموعة أجزاء مجموعة): نسمي المجموعة المكونة من جميع المجموعات الجزئية من مجموعة E بمجموعة أجزاء E و نرمز لها بـ $P(E)$

مثال: لتكن المجموعة $E = \{x_1, x_2, x_3\}$ فإن مجموعة أجزائها هي

$$P(E) = \{\Phi, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}\}$$

خواص (تقبل بدون برهان):

1. إذا كان عدد عناصر المجموعة E لانهايا يكون عدد عناصر مجموعة أجزائها لانهايا .
2. إذا كان عدد عناصر المجموعة E يساوي n يكون عدد عناصر مجموعة أجزائها يساوي 2^n

تعريف (مقصود تطبيق على مجموعة): ليكن التطبيق $f: E \rightarrow F$ ولتكن D مجموعة جزئية من المجموعة E نسمي التطبيق التالي $g: D \rightarrow F$ والمعرف بالشكل $g(d) = f(d), \forall d \in D$ بمقصود f على D .

تعريف (التطبيق المميز على مجموعة): لتكن A مجموعة جزئية من مجموعة E ، نعرف التطبيق المميز f_A

$$f_A: E \rightarrow \{0,1\}$$

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

مثال: لتكن المجموعة $E = \{x_1, x_2, x_3\}$ و المجموعة $A = \{x_1, x_2\}$ في هذه الحالة يمثل التطبيق f_A بالشكل:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = x_1 \text{ or } x_2 \\ 0 & \text{if } x = x_3 \end{cases}$$

يرمز لمجموعة التطبيقات المميزة لكل عناصر $P(E)$ بـ $\Phi(E)$. كما إنه يوجد تقابل بين $\Phi(E)$ و $P(E)$ ، و عندما تكون المجموعة منتهية و عدد عناصرها n فإن كلا من المجموعتين $\Phi(E)$ و $P(E)$ يحوي 2^n عنصراً .

مثال: من أجل المجموعة $E = \{x_1, x_2, x_3\}$ يكون:

$$P(E) = \{\Phi, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}\}$$

$$\Phi(E) = \{f_\Phi, f_{\{x_1\}}, f_{\{x_2\}}, f_{\{x_3\}}, f_{\{x_1, x_2\}}, f_{\{x_1, x_3\}}, f_{\{x_2, x_3\}}, f_{\{x_1, x_2, x_3\}}\}$$

3- بنية الجبر البولياني Boolean Algebra Structure

تعريف: لتكن B مجموعة غير خالية تحوي عنصرين على الأقل ولنعرّف على هذه المجموعة العمليات التالية:

- عملية ثنائية نسميها الجمع ويرمز لها بـ + :

$$+ : B \times B \rightarrow B$$

$$(a, b) \rightarrow a + b$$

عملية ثنائية نسميها الضرب ويرمز لها بـ $\cdot$:

$$\cdot : B \times B \rightarrow B$$

$$(a, b) \rightarrow a \cdot b$$

• عملية أحادية نسميها المتمم ويرمز لها بـ $-$:

$$- : B \rightarrow B$$

$$a \rightarrow \bar{a}$$

يقال عن المجموعة B المزودة بالعمليات السابقة إنها تملك بنية جبر بولياني (تسمى جبراً بوليانياً أو نظام جبر بولياني) إذا حققت **الموضوعات** التالية :

1- عمليتا الجمع والضرب تبديليتان: $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$,

2- عمليتا الجمع والضرب تجميعيتان: $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,

3- عمليتا الجمع والضرب توزيعيتان، الواحدية بالنسبة للأخرى: $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

4- يوجد عنصر حيادي بالنسبة لعملية الجمع ويرمز له بـ 0 وكذلك يوجد عنصر حيادي بالنسبة لعملية الضرب ويرمز له بـ 1

$$x + 0 = x, \quad x \cdot 1 = x$$

5- ناتج جمع أي عنصر إلى متممه يساوي الـ 1 وجداء ضرب عنصر بمتممه يساوي 0

$$x + \bar{x} = 1, \quad x \cdot \bar{x} = 0$$

ملاحظة: في بعض المراجع يرمز للعملية $-$ بـ $\neg$ أو بـ $'$.

أمثلة:

مثال (1): لتكن $B = \{0, 1\}$ ولتكن $+, \cdot, \neg$ ثلاث عمليات معرفة حسب الجدولين التاليين:

x	y	$x + y$	$x \cdot y$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

x	$\neg x$
0	1
1	0

جدول (2)

جدول (1)

والمطلوب: أثبت أن البنية $(B, +, \cdot, \neg)$ جبراً بوليانياً:

الحل: بكل بساطة نرى أن المجموعة غير خالية و $1 \neq 0$ وهناك عمليتان ثنائيتان في الجدول (2) وعملية أحادية في الجدول (1). **نلاحظ من الجدولين (1) و (2) مايلي:**

$$\begin{aligned}
& \forall x, y, z \in B \\
& x + y = y + x \\
& x \cdot y = y \cdot x \\
& (x + y) + z = x + (y + z) \\
& (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \\
& x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \\
& x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \\
& x + \neg x = 1 \\
& x \cdot \neg x = 0
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن البنية $(B, +, \cdot, \neg)$ جبراً بوليانياً

مثال (2): لتكن E مجموعة ما و $P(E)$ مجموعة أجزائها (المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية من المجموعة E). إن المجموعة $P(E)$ تشكل بنية جبر بولياني تؤدي فيه دور الجمع عملية الاجتماع $\cup$ و دور الضرب عملية التقاطع $\cap$ و دور الاتمام $-$

الحل: المجموعة $P(E)$ تتضمن تحوي عنصرين على الأقل Φ, E من أجل المجموعات A, B, C الجزئية من المجموعة E ، التالي دوماً محقق في المجموعات:

$$\begin{aligned}
A \cup B &= B \cup A \\
A \cap B &= B \cap A \\
(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\
(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
A \cup \bar{A} &= E \\
A \cap \bar{A} &= \Phi
\end{aligned}$$

من خلال الخواص السابقة المحققة على المجموعات نجد أن البنية $(P(E), \cup, \cap, -)$ تشكل جبراً بوليانياً .

مثال (3): لتكن المجموعة $E = \{1, 2, 5, 10\}$ المؤلفة من الأعداد الطبيعية القاسمة للعدد 10 نعرف على هذه المجموعة العمليات التالية:

الجمع: ناتج جمع عنصرين هو المضاعف المشترك البسيط لهما أي

$$x + y = \text{Icm}(x, y), \quad \forall x, y \in E$$

الضرب: جداء ضرب عنصرين هو القاسم المشترك الأعظم أي:

$$x \cdot y = \text{gcd}(x, y), \quad \forall x, y \in E$$

المتنم: متمم عنصر هو العنصر الممثل بناتج قسمة 10 على العدد الذي يمثله هذا العنصر أي:

$$\bar{x} = \frac{10}{x}$$

عندئذ البنية $(E, +, \cdot, -)$ تعرف جبراً بوليانياً

الحل: نلاحظ من أجل أي x, y, z من المجموعة المعطاة E مايلي:

$$x + y = \text{Icm}(x, y) = \text{Icm}(y, x) = y + x$$

$$\begin{aligned}
x.y &= \gcd(x,y) = \gcd(y,x) = y.x \\
(x+y)+z &= \text{Icm}(\text{Icm}(x,y),z) = \text{Icm}(x,\text{Icm}(y,z)) = x+(y+z) \\
(x.y).z &= \gcd(\gcd(x,y),z) = \gcd(x,\gcd(y,z)) = x.(y.z) \\
x.(y+z) &= \gcd(x,\text{Icm}(y,z)) = \text{Icm}(\gcd(x,y),\gcd(x,z)) = x.y+x.z \\
x+(y.z) &= \text{Icm}(x,\gcd(y,z)) = \gcd(\text{Icm}(x,y),\text{Icm}(x,z)) = (x+y).(x+z)
\end{aligned}$$

$$x.\bar{x} = \gcd(x, \frac{10}{x}) = 1, \quad \forall x \in \{1,2,5,10\}$$

$$x + \bar{x} = \text{Icm}(x, \frac{10}{x}) = 10, \quad \forall x \in \{1,2,5,10\}$$

مما سبق نجد أن البنية $(E, +, \cdot, \bar{})$ تعرف جبراً بوليانياً

مثال (4): نعرف على المجموعة $\Phi(E)$ عمليتين ثنائيتين هما الجمع (+) و الضرب (.) ، و عملية احادية هي الاتمام ($\bar{}$) بالشكل التالي:

$$\begin{aligned}
f_A + f_B &= f_{A \cup B} \\
f_A \cdot f_B &= f_{A \cap B} \\
\overline{f_A} &= f_{\bar{A}}
\end{aligned}$$

بين أن البنية $(\Phi(E), +, \cdot, \bar{})$ هي جبراً بوليانياً

الحل: نجد في $(\Phi(E), +, \cdot, \bar{})$ كل الخواص الموجودة في $(P(E), \cup, \cap, \bar{})$ و بالتالي $(\Phi(E), +, \cdot, \bar{})$ تعرف جبراً بوليانياً

ملاحظة: في الجبر البولياني يسمح بكتابة الشكل $a.b$ بدون اشارة الضرب أي ab

تعريف: نسمي عبارة بوليانية كل عبارة مؤلفة من متغيرات بوليانية ومن العمليات البوليانية $+, \cdot, \bar{}$ وذات معنى.

تعريف: لتكن E عبارة بوليانية ولتكن E^* العبارة التي نحصل عليها من E باستبدال كل 1 بـ 0 ، وكل 0 بـ 1 ، وكل + بـ . ، وكل . بـ + عندئذ نقول عن E^* هي العبارة الثنوية (Dual) للعبارة E .

مثال: إذا كانت $\overline{x+y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ فإن $E : (x+y) = \bar{x} \cdot \bar{y}$ فإن $E^* : (x.y) = \bar{x} + \bar{y}$ وإذا كانت $E : x+1=1$ فإن $E^* : x.0=0$.

4- مبدأ الثنوية

لكل مبرهنة في الجبر البولياني شكلان للعرض، ينتج أحدهما من الآخر بتبديل رموز العمليات + و . وتبديل العناصر **الحيادية** 0,1 يبعثهما ضمن سياق سرد المبرهنة.

إذا كانت T مبرهنة في جبر بولياني فإن T^* مبرهنة أيضاً في هذا الجبر البولياني.

مثال لدينا الخواص التالية صحيحة في الجبر البولياني $(B, +, \cdot, \bar{})$

$$\forall a, b, c \in B, \overline{a+b+c} = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$$

$$\forall a, b \in B, (a.b) + a = a$$

$$\forall a, b, c \in B, a = b \Rightarrow a + c = b + c$$

اعتماداً على مبدأ الثنوية يكون التالي صحيحاً في الجبر البولياني $(B, +, \cdot, \bar{})$

$$\forall a, b \in B, \overline{a.b.c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$$

$$\forall a, b \in B, (a+b).a = a$$

$$\forall a, b, c \in B, a = b \Rightarrow a.c = b.c$$

5- الحساب في الجبر البولياني Computation of Boolean Algebra

خواص: ليكن $(B, +, \cdot, \bar{})$ جبراً بوليانياً عندئذ الخواص التالية صحيحة :

1- 0 هو العنصر المحايد الوحيد بالنسبة لعملية الجمع و 1 هو العنصر المحايد الوحيد بالنسبة لعملية

الضرب 0 هو عنصر ماص بالنسبة إلى الضرب: $\forall a \in B, a \cdot 0 = 0$

2- متمم العنصر $a \in B$ هو العنصر الوحيد $\bar{a} \in B$ والذي يحقق: $a + \bar{a} = 1, a \cdot \bar{a} = 0$

3- متمم المتمم هو العنصر نفسه $\forall a \in B, \bar{\bar{a}} = a$

4- العنصران 0, 1 متتامان أي

$$\bar{0} = 1$$

$$\bar{1} = 0$$

وكذلك 1 ماص بالنسبة إلى الجمع أي $\forall a \in B, a + 1 = 1$

5- الثبات $\forall a \in B, a + a = a, a \cdot a = a$

6- في عبارة مجموع جداءات يمتص كل حد فيه الحدود التي هي مضاعفات هذا الحد فمثلاً :

$$a + (a \cdot b) = a \quad \text{امتصاص من قبل } a \quad \text{و} \quad a \cdot b = a \cdot b + (a \cdot b \cdot c) + (a \cdot b \cdot \bar{c} \cdot d) \quad \text{امتصاص من قبل } a \cdot b$$

7- إذا حوى أحد حدود مجموع جداءات ، عاملاً a وحوى حد آخر عاملاً مثل $\bar{a}$ يمكن إضافة الحد

المكون من جداء العوامل المكونة للحددين السابقين باستثناء a و $\bar{a}$ - أو حذفه إن وجد - دون أن تتغير قيمة التعبير البولياني الذي يمثل هذا المجموع . فمثلاً :

$$1 - (a \cdot d) + (b \cdot d) + (\bar{a} \cdot b \cdot \bar{c}) = (a \cdot d) + (b \cdot d) + (\bar{a} \cdot b \cdot \bar{c}) + (d \cdot b \cdot \bar{c})$$

$$2 - b + (\bar{b} \cdot a) = b + (\bar{b} \cdot a) + a$$

$$3 - (a \cdot \bar{c}) + (\bar{b} \cdot c) + (a \cdot \bar{b}) = (a \cdot \bar{c}) + (\bar{b} \cdot c)$$

8- قانوني دو-مورغان

$$\forall a, b \in B, \overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$$

البرهان:

■ إثبات (الخاصة 1) وحدانية العناصر المحايدة

ليكن 0' عنصراً محايداً آخر بالنسبة للجمع في الجبر البولياني $(B, +, \cdot, \bar{})$ عندها يكون:

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

وبنفس الطريقة نجد أن 1 هو المحايد الوحيد بالنسبة لعملية الضرب

• من أجل $a \in B$ لنثبت أن $a + a = a$ و $a \cdot a = a$

$$\text{لدينا} \quad a + a = 0 + a = a \quad \text{باستخدام الموضوع 5 و الموضوع 3}$$

$$\text{وكذلك} \quad (a + a) = (a + a)(\bar{a} + a) \quad \text{باستخدام الموضوع 4}$$

$$= (a + a) \cdot 1 \quad \text{باستخدام الموضوع 5}$$

$$= a + a \quad \text{باستخدام الموضوع 3}$$

$$a + a = a \quad \text{وبالتالي}$$

$$a \cdot a = a \quad \text{وبحسب مبدأ التثوية ينتج أن}$$

• إثبات أن 0 و 1 عنصران ماصان- على الترتيب- بالنسبة لعملية الجمع والضرب

إثبات المساواة $1+a=1$ و $0.a=0$

لدينا $1+a=(a+\bar{a})+a$

$$=(a+a)+\bar{a}$$

$$=a+\bar{a}=1$$

وبحسب مبدأ الثنوية نجد أن $0.a=0$

باستخدام الموضوع 5

باستخدام الموضوع 1 الموضوع 2

باستخدام الموضوع 5

■ اثبات (الخاصة 2) وحدانية المتمم $\bar{a}$ الذي يحقق $a+\bar{a}=1$, $a.\bar{a}=0$

نفرض وجود عنصر آخر $a' \in B$ يحقق $a+a'=1$, $a.a'=0$

لدينا $a+a'=1$. التالي يكون صحيحا $\bar{a}.(a+a')=\bar{a}.1$

$$\bar{a}.(a+a')=(\bar{a}.a)+(\bar{a}.a')=\bar{a}$$

باستخدام الموضوع 5 يكون $0+(\bar{a}.a')=\bar{a}$ و باستخدام الموضوع 3 يكون $\bar{a}.a'=\bar{a}$

ومن جهة أخرى لدينا : $a+\bar{a}=1$ عندئذ يكون : $(a+\bar{a})a'=1.a'$ باستخدام الموضوع 3

الموضوع 4 يكون لدينا $(a.a')+(\bar{a}.a')=a'$ و بالفرض يكون $0+(\bar{a}.a')=a'$ و باستخدام

الموضوع 3 يكون $\bar{a}.a'=a'$. مما سبق نستنتج أن $\bar{a}=\bar{a}.a'=a'$

● اثبات (الخاصة 3) أن $\forall a \in B, \bar{\bar{a}}=a$

كون $\bar{a}$ هو العنصر المتمم لـ a يقتضي صحة المساواتين

$$\bar{a}.a=0 \text{ و } \bar{a}+a=1$$

وكذلك فإن كون $\bar{\bar{a}}$ هو العنصر المتمم لـ $\bar{a}$ يقتضي

$$\bar{\bar{a}}.\bar{a}=0 \text{ و } \bar{\bar{a}}+\bar{a}=1$$

وكون العنصر المتمم وحيد فإن $\bar{\bar{a}}=a$

■ اثبات (الخاصة 4) $\bar{1}=0, \bar{0}=1$

لدينا من الموضوع 3 $\begin{cases} 0+1=1 \\ 0.1=0 \end{cases}$ ومن الخاصة 2 نستنتج أن 1 هو العنصر المتمم لـ 0 أي $\bar{0}=1$

بحسب مبدأ الثنوية نجد $\bar{1}=0$

● اثبات (الخاصة 6) أن $\forall a, x \in B, a+(a.x)=a$

لدينا $a+(a.x)=(a.1)+(a.x)$ حسب الموضوع 3

$$=a(1+x)$$

حسب الموضوع 4

$$=a.1$$

كون 1 عنصر ماص

$$=a$$

حسب الموضوع 3

• اثبات (الخاصة 7) أن $\forall a, x, y \in B, (a.x) + (\bar{a}.y) = (a.x) + (\bar{a}.y) + (x.y)$

لدينا :

$$\text{حسب الخاصة 6} \quad (a.x) + (\bar{a}.y) = (a.x) + (\bar{a}.y) + (a.x.y) + (\bar{a}.x.y)$$

$$\text{حسب الموضوع 4} \quad = (a.x) + (\bar{a}.y) + (x.y) + (a + \bar{a})$$

$$\text{حسب الموضوع 5} \quad = (a.x) + (\bar{a}.y) + (x.y) + (x.y).1$$

$$\text{حسب الموضوع 3} \quad = (a.x) + (\bar{a}.y) + (x.y)$$

• اثبات (الخاصة 8) أن $\forall a, b \in B, \overline{a+b} = \bar{a}.\bar{b}$

$$\text{لدينا} \quad \text{حسب الخاصة 7} \quad (\bar{a}.\bar{b}) + a + b = (\bar{a}.\bar{b}) + a + \bar{b} + b$$

$$\text{حسب الموضوع 5} \quad = (\bar{a}.\bar{b}) + a + 1$$

$$\text{كون 1 عنصر ماص} \quad = 1$$

وكذلك لدينا من جهة ثانية

$$\begin{aligned} \text{باستخدام الموضوع 4} \quad \bar{a}.\bar{b} + (a+b) &= (\bar{a}.\bar{b}.a) + (\bar{a}.\bar{b}.b) \\ \text{باستخدام الموضوع 1,2,5} \quad &= 0 + 0 \\ \text{باستخدام الموضوع 3} \quad &= 0 \end{aligned}$$

وتبعاً للخاصة 5 نجد

$$(\bar{a}.\bar{b}) + a + b = 1$$

$$(\bar{a}.\bar{b}).(a+b) = 0$$

بالتالي أن العنصر $\bar{a}.\bar{b}$ هو العنصر المتمم للعنصر $a+b$ أي أن:

$$\overline{a+b} = \bar{a}.\bar{b}$$

والمساواة الثانية $\overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}$ هي ثنوية المساواة المثبتة آنفاً.

6- فك العبارات البوليانية وتبسيطها Simplification of Boolean Expressions

يمكننا اعتماد قواعد لحذف الأقواس والنقاط- التي نرسم بها إلى عملية الضرب في الجبر البوليني كما هو الحال في الجبر التقليدي ومن ثم فإن:

العبارة $a + (b.c)$ تكتب بالشكل $a + bc$

العبارة $(a.b) + (b.c.a)$ تكتب بالشكل $a\bar{b} + bc\bar{a}$

العبارة $(a + b).(c + d)$ تكتب بالشكل $a\bar{c} + ad + b\bar{c} + bd$

أمثلة:

مثال (1) بسط العبارة البولينية:

$$(a + b).(a + c)$$

الحل:

حسب الموضوع 4

حسب الموضوع 4

حسب الخاصة 5 والخاصة التجميعية

حسب الخاصة 6

$$\begin{aligned}(a + b).(a + c) &= [(a + b)a] + [(a + b)c] \\ &= [aa + ba] + [ac + bc] \\ &= a + (ba) + (ac) + (bc) \\ &= a + bc\end{aligned}$$

مثال (2) بسط العبارة البولينية:

$$e = (a + \bar{b} + \bar{c}).(\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}) + \bar{a}.\bar{b}.(c.d + c.\bar{d})$$

الحل: في البداية العبارة إلى مجموع جداءات ، بالاعتماد على خاصة دو-مورغان و الخاصة التوزيعية للضرب بالنسبة للجمع :

$$\begin{aligned}e &= \overline{a + \bar{b} + \bar{c}} + (\overline{a + \bar{b} + \bar{c}}) + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} \\ &= \bar{a}\bar{b} + \bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d}\end{aligned}$$

و لما كان $\bar{x} = x$ نكتب :

$$e = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d}$$

و في المرحلة الثانية نبسط الجداءات:

$$\begin{aligned}e &= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{b} \\ &= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b} \\ &= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{b} \\ &= \bar{a}(\bar{b} + \bar{b}) + \bar{a}\bar{c} \\ &= \bar{a} + \bar{a}\bar{c}\end{aligned}$$

امتصاص من قبل $\bar{a}$

$$e = \bar{a}$$

وبالتالي:

ومنه نحصل على المساواة

$$\overline{a + \bar{b} + \bar{c}} + (\overline{a + \bar{b} + \bar{c}}) + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} = \bar{a}$$

مثال (3) بسط العبارة البوليانية:

$$f = \bar{a}(c + \bar{b} + \bar{d}) + abc + ab\bar{c} + \bar{c}(a + \bar{b}\bar{d}) + \bar{a}cd$$

الحل: لدينا

$$\begin{aligned} f &= \bar{a}c + \bar{a}\bar{b}\bar{d} + abc + ab\bar{c} + a\bar{c} + \bar{c}\bar{b}\bar{d} + \bar{a}cd \\ &= \bar{a}c + \bar{a}\bar{b}\bar{d} + ab(c + \bar{c}) + a\bar{c} + \bar{c}\bar{b}\bar{d} \\ &= \bar{a}c + \bar{a}\bar{b}\bar{d} + ab + a\bar{c} + \bar{c}\bar{b}\bar{d} \\ &= \bar{a}c + \bar{a}\bar{b}\bar{d} + ab + a\bar{c} \end{aligned}$$

مصطلحات:

يرمز إلى عناصر الجبر البولياني B بالأحرف $a, b, c, d, e, \dots$ ونستخدم عند التعامل مع التعابير البوليانية المصطلحات التالية

الحد البسيط: هو عبارة بوليانية مكونة من حرف واحد مع أو بدون إشارة المتمم فوّه مثل:

$$a; \bar{b}; c; \bar{c}; d; \bar{d}; \dots$$

الحد المركب أو اختصاراً الحد: هو عبارة بوليانية مكونة من جداء واحد أو أكثر من الحدود البسيطة مثل:

$$\bar{a}bc, \bar{b}ef, \bar{c}, \bar{c}d\bar{g} \dots$$

المجموع البسيط: هو عبارة بوليانية مكونة من مجموع واحد أو أكثر من الحدود البسيطة مثل:

$$\bar{a} + b + \bar{c}, \bar{c} + e + f + \bar{g} \dots$$

عبارة $\sum \prod$: هو عبارة بوليانية مكونة من مجموع واحد أو أكثر من الحدود (المركبة) مثل:

$$ab + \bar{a}b\bar{c} + d\bar{e}f + \bar{b}c, \bar{d}ef + g + d, a + \bar{c}$$

عبارة $\prod \sum$: هو عبارة بوليانية مكونة من جداء واحد أو أكثر من المجاميع البسيطة مثل:

$$(\bar{a} + b).(\bar{a} + c).a.(c + \bar{d}).(\bar{f} + g), a + b + c, \dots$$

• الحد الأصغري لـ n عنصراً $a_1, a_2, \dots, a_n$ هو حد مركب من جداء n حداً بسيطاً نحصل عليه بأن

نختار من كل ثنائية $(a_i, \bar{a}_i)$ حداً بسيطاً واحد فقط

أمثلة:

1. الحدود الأصغرية للعنصرين a و b هي: $ab, \bar{a}\bar{b}, \bar{a}b, a\bar{b}$

2. الحدود الأصغرية للعناصر a و b و c هي: $abc, \bar{a}bc, a\bar{b}c, \bar{a}\bar{b}c, \bar{a}b\bar{c}, a\bar{b}\bar{c}, \bar{a}\bar{b}\bar{c}$

• الحد الأعظمي لـ n عنصراً $a_1, a_2, \dots, a_n$ هو مجموع بسيط مؤلف من مجموع n حد بسيط نحصل عليه

بالاختيار من كل ثنائية $(a_i, \bar{a}_i)$ حداً بسيطاً واحداً فقط.

أمثلة:

- الحدود الأعظمية للعنصرين a و b هي: $a+b, a+\bar{b}, \bar{a}+\bar{b}, \bar{a}+b$
- الحدود الأعظمية للعناصر a و b و c هي:
 $a+b+c, \bar{a}+b+c, a+\bar{b}+c, a+b+\bar{c}, \bar{a}+\bar{b}+c, \bar{a}+b+\bar{c}, a+\bar{b}+\bar{c}, \bar{a}+\bar{b}+c$

- العبارة الثنوية لعبارة بوليانية بـ n عنصراً $a_1, a_2, \dots, a_n$ نحصل عليها من العبارة البوليانية باستبدال كل إشارة + بـ 0 وكل إشارة - بـ 1 وكل 0 بـ 1 وكل 1 بـ 0

مثال:

العبارة البوليانية	العبارة الثنوية
$f(a, b) = a + b$	$f^*(a, b) = a.b$
$f(a, b, c) = a + \bar{b}c + \bar{a}c$	$f^*(a, b, c) = a.(b+c).(a+c)$
$f(a, b, c, d) = (a + \bar{b}).c + d$	$f^*(a, b, c, d) = (a.\bar{b} + c).d$

7- قواعد متعلقة بالمساويات البوليانية:

قاعدة (1): إن جمع أو ضرب طرفي مساواة بأحد عناصر الجبر البولياني يعطي مساواة جديدة:

$$a = b \Rightarrow \begin{cases} a + c = b + c \\ a.c = b.c \end{cases} \quad \text{فإن } \forall a, b, c \in B.$$

ملاحظة: المساواة $a + c = b + c$ لا تقتضي المساواة $a = b$ وكذلك المساواة $a.c = b.c$ لا تقتضي المساواة $a = b$

والمبرهنة الآتية تحدد الشروط الكافية لكي يكون الاقتضاء السابق صحيحاً.

مبرهنة: لتكن a, b, c ثلاث عناصر من الجبر البولياني B فإن

$$\left. \begin{matrix} a + c = b + c \\ a.c = b.c \end{matrix} \right\} \Rightarrow a = b$$

الإثبات: لدينا

$$(a + c).a = a.a + c.a = a + c.a = a$$

$$\text{لنفترض أن } \begin{matrix} a + c = b + c \\ a.c = b.c \end{matrix} \text{ عندئذ يكون}$$

$$\begin{aligned} (a + c).a &= (b + c).a = ab + ac = ab + bc \\ &= b(a + c) = b.b + b.c = b + bc = b \end{aligned}$$

ومن ذلك نستنتج أن $a=b$

قاعدة (2): إن جمع مساواتين طرفاً إلى طرف أو ضرب مساواتين طرفاً في طرف يولد مساواة جديدة: أي أن

$$\forall a, b, c, d \in B, \quad \left. \begin{matrix} a = b \\ c = d \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a + c = b + d \\ a \cdot c = b \cdot d \end{cases}$$

قاعدة (3): يتساوى عنصران من جبر بولياني إذا وفقط إذا تساوى متماهما أي أن:

$$\forall a, b \in B, \quad a = b \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$$

مبرهنة: إذا كان a و b عنصرين من جبر بولياني B فإن:

$$a \cdot b = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$a + b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

البرهان: لنثبت على التكافؤ الأول أما التكافؤ الثاني ينتج باستخدام مبدأ الثنوية

$$a \cdot b = 1 \Rightarrow \begin{cases} \bar{a} \cdot ab = \bar{a} \cdot 1 \\ ab \bar{b} = 1 \cdot \bar{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \bar{a} \\ 0 = \bar{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = a \\ 1 = b \end{cases}$$

8- علاقات الترتيب في الجبر البولياني

ليكن $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ جبرا بوليانيا نعرف علاقة أصغر أو يساوي في الجبر B بالشكل:

$$\forall a, b \in B, \quad a \leq b \Leftrightarrow a \cdot b = a$$

وتعرف علاقة أكبر أو تساوي في الجبر B بالشكل:

$$\forall a, b \in B, \quad a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$$

مع ملاحظة أن:

$$\forall a \in B \begin{cases} 0 \cdot a = 0 \Rightarrow 0 \leq a \\ a \cdot 1 = a \Rightarrow a \leq 1 \end{cases}$$

في الجبر البولياني $(p(E), \cup, \cap, ', \emptyset, E)$ العلاقة $\leq$ هي علاقة الاحتواء $\subset$

$$\forall A, B \subseteq E, \quad A \leq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$$

مبرهنة: في كل جبر بولياني $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ العلاقة $\leq$ هي علاقة ترتيب

الإثبات:

• خاصية الانعكاسية: ليكن $a \in B$ لدينا

$$a \cdot a = a \Rightarrow a \leq a$$

• خاصية التخالفية: ليكن a و b عنصران من B لدينا

$$\begin{cases} a \leq b \\ b \leq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot b = a \\ b \cdot a = b \end{cases} \Rightarrow a = b$$

• خاصية متعدية: ليكن a و b و c ثلاثة عناصر من B لدينا

$$\begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot b = a \\ b \cdot c = b \end{cases} \Rightarrow a = ab = a(bc) = (ab)c = ac \Rightarrow a \leq c$$

9- الجبر البولياني الجزئي Sub-Boolean Algebra:

نقول عن مجموعة جزئية غير خالية B' من جبر بولياني $(B, +, \cdot, -)$ إنها جبر بولياني جزئي عندما تعرّف مقصورات العمليات الثلاث $+, \cdot, -$ على المجموعة B' بنية جبر بولياني .

فلكي يكون للمجموعة الجزئية B' بنية جبر بولياني، يلزم أن تحقق العمليات الثلاث $(+, \cdot, -)$ الخواص التالية:

1- B' مغلقة بالنسبة لعملية الجمع:

$$\forall a, b \in B', a + b \in B'$$

2- مغلقة بالنسبة إلى الضرب: $\forall a, b \in B', a \cdot b \in B'$

3- مغلقة بالنسبة إلى المتمم $\forall a \in B', \bar{a} \in B'$

والمبرهنة التالية تبرهن أن هذه الخواص كافية أيضاً

مبرهنة (تقبل بدون برهان): كل مجموعة جزئية غير خالية B' من جبر بولياني مغلقة بالنسبة للعمليات $(+, \cdot, -)$ هي جبر بولياني جزئي

مثال : لتكن المجموعة $E = \{x_1, x_2\}$ وجبر أجزائها $(p(E), \cup, \cap, -)$

$$p(E) = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}\}$$

يوجد في هذا الجبر البولياني جبران جزئيان وحيدان هما :

$$\{\emptyset, \{x_1, x_2\}\} \text{ و } p(E)$$

10 - ايزومورفيزم الجبر البوليانية Boolean Isomorphism

تعريف: نقول عن تطبيق f من جبر بولياني $(B, +, \cdot, -)$ إلى جبر بولياني آخر $(B', +', \cdot', -')$ إنه ايزومورفيزم إذا تحققت الشروط التالية :

$$f(a + b) = f(a) + ' f(b) \quad \forall a, b \in B \quad -1$$

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot ' f(b) \quad \forall a, b \in B \quad -2$$

$$f(\bar{a}) = \overline{f(a)}' \quad \forall a \in B, \forall a \in B \quad -3$$

$$f \text{ تقابل } f \quad -4$$

خاصة 1: إذا كان f ايزومورفيزم من الجبر البولياني $(B, +, \cdot, -)$ إلى الجبر البولياني $(B', +', \cdot', -')$ فإن التطبيق العكسي f^{-1} هو ايزومورفيزم من الجبر البولياني $(B', +', \cdot', -')$ إلى الجبر البولياني $(B, +, \cdot, -)$

إثبات الخاصة: ليكن a', b' عنصرين من B' لدينا التكافؤات

$$f^{-1}(a' + ' b') = f^{-1}(a') + f^{-1}(b')$$

$$\Leftrightarrow f[f^{-1}(a' + ' b')] = f[f^{-1}(a') + (f^{-1}(b'))]$$

$$\Leftrightarrow f[f^{-1}(a' + ' b')] = f[f^{-1}(a')] + ' f[(f^{-1}(b'))]$$

$$\Leftrightarrow a' + ' b' = a' + ' b'$$

بنفس الطريقة يبرهن على أن : $f^{-1}(a' \cdot ' b') = f^{-1}(a') \cdot f^{-1}(b')$ و $f^{-1}(\bar{a}') = \overline{f^{-1}(a')}$

خاصة 2: إذا كان f ايزومورفيزم من الجبر البوليني $(B, +, \cdot, ', \leq)$ إلى الجبر البوليني $(B', +', \cdot', ', \leq')$ فإن:

$$\forall a, b \in B, a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$$

أي أن الايزومورفيزم يحافظ على الترتيب وفق العلاقة $\leq$
إثبات الخاصة: لدينا التكافؤات

$$a \leq b \Leftrightarrow a \cdot b = a \Leftrightarrow f(a \cdot b) = f(a) \Leftrightarrow$$

$$f(a) \cdot' f(b) = f(a) \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$$

11- الذرات في الجبر البوليني Atoms

تعريف الذرة: ليكن $(B, +, \cdot, ', \leq)$ جبرا بولانيا منتهايا . نقول عن عنصر منه إنه ذرة إذا فقط إذا كان غير معدوم و يوجد في B فقط -عنصران أصغر منه وفق علاقة الترتيب $\leq$: العنصر 0 ونفسه.

أمثلة:

مثال-1: في الجبر البوليني $(p(E), \cup, \cap, ', \leq)$ حيث $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. علاقة الترتيب الاحتواء $\subset$. الذرات في هذا الجبر هي المجموعات الوحيدة العنصر : $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\}$

مثال-2: في الجبر البوليني $(\{0,1\}, +, \cdot, ', \leq)$ العنصر 1 هو الذرة الوحيدة الوحيدة

مثال-3: في الجبر البوليني $(\{0,1\}^2, +, \cdot, ', \leq)$ الذرات هي $(0,1)$ و $(1,0)$

خواص الذرات (تقبل بدون برهان):

1. مجموعة الذرات في جبر بوليني منته و غير خالية
2. جداء ذرتين مختلفتين معدوم
3. مجموع كل الذرات في جبر بوليني منته يساوي 1
4. كل عنصر من جبر بوليني منته يكتب بطريقة وحيدة كمجموع ذرات مختلفة
5. إذا كان عدد الذرات في جبر بوليني يساوي p فإن عدد عناصره يساوي 2^p

مبرهنة ستون (تقبل بدون برهان):

ليكن $(B, +, \cdot, ', \leq)$ جبرا بولانيا منتهايا ، عدد الذرات فيه يساوي p يوجد ايزومورفيزم بين هذا الجبر و جبر الأجزاء $(p(E), \cup, \cap, ', \leq)$ حيث E مجموعة ما مكونة من p عنصرا.

ملاحظة-1: نرمز لكل العبارات البولينية — B ، A — $G(A, B)$ مثل: $A \cap \bar{B} \in G(A, B)$ ، $\bar{A} \cup B \cup B \in G(A, B)$ ، $A \in G(A, B)$ ، $B \in G(A, B)$. إن المجموعة $G(A, B)$ غير خالية لأنها تحوي كلا من A و B وكذلك مغلقة بالنسبة إلى العمليات الثلاث $\cup$ ، $\cap$ ، $'$ من التعريف و من ثم فإن $G(A, B)$ هي جبر بوليني جزئي من $P(E)$.

ملاحظة-2: لتكن المجموعة التالية: $P = \{\Phi, A, B, \bar{A}, \bar{B}, A \cup B, A \cup \bar{B}, \bar{A} \cup B, \bar{A} \cup \bar{B}, A \cap B, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B, \bar{A} \cap \bar{B}, (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}), (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})\}$

لدينا مايلي:

- P مغلقة بالنسبة للعمليات الثلاث : $\cup, \cap, -$ و $P \subset G(A, B)$
- لنبرهن أن $P \supset G(A, B)$. كل عنصر $X \in G(A, B)$ نحصل عليه من تتابع العمليات $\cup, \cap, -$ انطلاقا من العناصر A, B التي هي من P . ولما كانت P مغلقة بالنسبة لهذه العمليات فإن الناتج النهائي X سيكون منتبها إلى P .

12- الجبر البوليني $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$:

ليكن $a_1, a_2, \dots, a_n$ عناصر من جبر بولياني $(B, +, \cdot, -)$. إن المجموعة الجزئية $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ المكونة من كل العبارات البولينية بـ $a_1, a_2, \dots, a_n$ تكون جبرا بوليانيا جزئيا من $(B, +, \cdot, -)$. سندرس بعض المفاهيم و الخواص المتعلقة بالجبر البوليني $(G(a_1, a_2, \dots, a_n), +, \cdot, -)$.

ترميز الحدود الأصغرية و الحدود الأعظمية بـ n عنصرا

لنوضح طريقة ترميز الحدود الأصغرية و الأعظمية من أجل $n=3$ في هذه الحالة يوجد $2^3=8$ حد أصغري بـ a, b, c لنرمز إليها بـ $m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7$. نحصل على أدلة هذه الرموز باستخدام نظام الترقيم الثنائي كما يوضح الجدول التالي :

الحد الأصغري	abc	$ab\bar{c}$	$a\bar{b}c$	$\bar{a}b\bar{c}$	$\bar{a}\bar{b}c$	$a\bar{b}\bar{c}$	$\bar{a}b\bar{c}$
الدليل في النظام الثنائي	111	110	101	100	011	010	001
الدليل في النظام العشري	7	6	5	4	3	2	1
الرمز	m_7	m_6	m_5	m_4	m_3	m_2	m_1

ملاحظة : إن استخدام هذا النوع من الترميز يتطلب المحافظة على الترتيب الأبجدي للأحرف $a, b, c, \dots$ أو ترتيب الأدلة عند تسمية العنصر بالشكل $a_1, a_2, \dots, a_n$. وكذلك فإن ترميز الحدود الأعظمية يتم وفق المبدأ ذاته . فمثلا: يرمز للحد الأعظمي $a + \bar{b} + c + \bar{d}$ بـ M_{10} و كذلك يرمز إلى الحد الأعظمي M_{18} بـ $a_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + a_4 + \bar{a}_5$.

مبرهنة (تقبل بدون برهان) إذا كانت $a_1, a_2, \dots, a_n$ عناصر من جبر بولياني منته ، إن ذرات الجبر البوليني $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ هي الحدود الأصغرية غير المعدومة المكونة من هذه العناصر .

خواص الحدود الأصغرية و الحدود الأعظمية (تقبل بدون برهان):

1. ليكن m_i و M_i - على الترتيب حدا أصغريا و حدا أعظما بـ $a_1, a_2, \dots, a_n$ ، حيث i هو دليل ما $0 \leq i \leq 2^n - 1$ عندئذ يكون لدينا : $\bar{m}_i = M_i$ و $\bar{M}_i = m_i$ حيث $j = 2^n - 1 - i$
2. جداء حدين أصغريين مختلفين يساوي 0 . مجموع حدين أعظميين يساوي 1
3. مجموع كل الحدود الأصغرية يساوي 1 . كل الحدود الأعظمية يساوي 0
4. كل عنصر من $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ يكتب كمجموع حدود أصغرية مختلفة و غير معدومة . و كذلك يكتب كجداء حدود أعظمية مختلفة لا تساوي 1
5. يتساوى مجموعتان من الحدود الأصغرية إذا وفقط إذا كانت الحدود الأصغرية غير المشتركة بينهما معدومة .

مثال:

$$abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} = abc + \bar{a}bc \Leftrightarrow \begin{cases} ab\bar{c} = 0 \\ a\bar{b}c = 0 \\ a\bar{b}\bar{c} = 0 \\ \bar{a}bc = 0 \end{cases}$$

6. عندما نكتب عنصرا a من $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ كمجموع حدود أصغرية (أو كجاء حدود أعظمية) فإن متممه يكتب كمجموع بقية الحدود الأصغرية (أو كجاء بقية الحدود الأعظمية).
7. عدد عناصر الجبر البولياني $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ هو 2^p حيث p هو عدد الحدود الأصغرية بـ $a_1, a_2, \dots, a_n$ غير المعدومة ، و هو أيضا عدد الحدود الأعظمية بـ $a_1, a_2, \dots, a_n$ المختلفة عن 1 .

التحليل القانوني الجمعي والتحليل القانوني الضربي:

تعريف:

- التحليل القانوني الجمعي لعنصر $a \in G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ هو مجموع حدود أصغرية بـ $a_1, a_2, \dots, a_n$ (مختلفة و غير معدومة) مساو لهذا العنصر .
- التحليل القانوني الضربي لعنصر $a \in G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ هو جداء حدود أعظمية بـ $a_1, a_2, \dots, a_n$ (مختلفة و لاتساوي 1) مساو لهذا العنصر .

مثال:

ليكن a, b, c ثلاث عناصر من جبر بولياني $(B, +, \cdot, \bar{})$ و المطلوب:

عين التحليل القانوني الجمعي للعنصر $e \in G(a, b, c)$ المعطى بالعبارة: $e = \overline{abc + b\bar{a} + a + \bar{b}c}$.

الحل: الخطوة الأولى نحول عبارة e إلى الشكل $\Sigma \Pi$ بالشكل:

$$\begin{aligned} e &= \overline{abc + b\bar{a} + a + \bar{b}c} \\ &= (b + \bar{c})(\bar{b} + a) + a + \bar{b}c \\ &= ab + \bar{b}\bar{c} + a\bar{c} + a + \bar{b}c \\ &= a + \bar{b}c + \bar{b}\bar{c} \end{aligned}$$

في الخطوة الثانية ندخل في كل حد مركب ، من المجموع ، الحدود البسيطة الناقصة . وتنتهي عملية الحساب بفك العبارة و حذف الحدود الأصغرية الزائدة :

$$\begin{aligned} e &= a + \bar{b}c + \bar{b}\bar{c} \\ &= a(b + \bar{b})(c + \bar{c}) + (a + \bar{a})\bar{b}c + (a + \bar{a})\bar{b}\bar{c} \\ &= abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c} \\ &= abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}\bar{c} \end{aligned}$$

لنحسب التحليل القانوني الضربي: نعلم أن التحليل القانوني الجمعي للعنصر $\bar{e}$ هو مجموع الحدود الأصغرية التي لاتظهر في التحليل القانوني الجمعي لـ e :

$$\bar{e} = \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}b\bar{c}$$

$$\begin{aligned} e &= \bar{\bar{e}} \\ &= \overline{\bar{a}b\bar{c} + \bar{a}b\bar{c}} \\ &= \overline{\bar{a}b\bar{c}} \cdot \overline{\bar{a}b\bar{c}} \\ &= (a + \bar{b} + c)(a + \bar{b} + \bar{c}) \end{aligned}$$

و من ثم نجد

13- المجموعات الحرة في الجبر البولياني Independent Sets: Boolean Algebra

تعريف: ليكن $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ جبر بولياني، ولتكن $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ مجموعة مؤلفة من n عنصراً من الجبر البولياني B .
نقول عن S إنها حرة عندما تكون جميع الحدود الأصغرية بـ $a_1, a_2, \dots, a_n$ مختلفة عن الصفر عندئذ نقول عن العناصر $a_1, a_2, \dots, a_n$ بأنها مستقلة بوليانياً.
كما نقول عن مجموعة جزئية من الجبر البولياني B إنها مرتبطة إذا كانت **غير** حرة.

مثال 1: ليكن الجبر البولياني $(p(E), \cup, \cap, ')$ حيث $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ المجموعات التالية مستقلة:

$\{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}\}$; $\{\{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}\}$; $\{\{x_2\}\}$; $\{\{x_1, x_2, x_3\}\}$
والمجموعات التالية مرتبطة: $\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}\}$; $\{\Phi\}$; $\{\{x_1\}, E\}$; $\{\{x_1\}, \{x_3\}, \{x_3, x_4\}\}$

ملاحظات:

1. إذا انتمى العنصر 0 أو العنصر 1 إلى مجموعة جزئية S كانت مرتبطة بوليانياً .
2. إذا كانت المجموعة S وحيدة العنصر و عناصرها الوحيد يختلف عن 0 و عن 1 فهي مستقلة بوليانياً .

خواص المجموعات الحرة (تقبل بدون برهان):

- خاصة (1):** إن الاستعاضة عن عدد من عناصر مجموعة حرة S بمتماثلاتها لا يغير من طبيعة المجموعة الناتجة S' أي تكون حرة أيضاً.
- خاصة (2):** لتكن S و S' مجموعتان جزئيتان من جبر بولياني، مرتبطتان بعلاقة الاحتواء $S \subset S'$ فإذا كانت S' حرة كانت S حرة وإذا كانت S مرتبطة كانت S' مرتبطة.
- خاصة (3):** ليكن B جبراً بوليانياً يحوي 2^n عنصراً وليكن p أكبر عدد صحيح يحقق الشرط $2^p \leq n$ عندئذ يكون لدينا:
- 1- كل مجموعة جزئية حرة تحوي p عنصراً على الأكثر.
 - 2- توجد على الأقل مجموعة حرة مؤلفة من p عنصر.

14- المجموعات المولدة في الجبر البولياني Generator sets: Boolean Algebra

تعريف: نقول عن مجموعة $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ من جبر بولياني B إنها مولدة لهذا الجبر عندما يكون $B = G(a_1, a_2, \dots, a_n)$
كما نقول عن العناصر $a_1, a_2, \dots, a_n$ بأنها تكون منظومة مولدة للجبر البولياني B

مثال:

في الجبر البولياني $(p(E), \cap, \cup, ')$ حيث $E = \{a_1, a_2, \dots, a_4\}$ المجموعات التالية مولدة:

$\{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}\}$
 $\{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}\}$
 $\{\Phi, \{x_1, x_2\}, \{x_2, x_4\}\}$

خواص المجموعات المولدة (تقبل بدون برهان):

- 1- لتكن $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ مجموعة جزئية من جبر بولياني B عندئذ الخواص التالية متكافئة:
- S مولدة للجبر B

- الحدود الأصغرية غير المعدومة بـ $a_1, a_2, \dots, a_n$ هي ذرات الجبر B
- كل عنصر من B يكتب بطريقة وحيدة كمجموع حدود أصغرية بـ $a_1, a_2, \dots, a_n$ مختلفة و غير معدومة.

2- إن الاستعاضة عن عدد من عناصر مجموعة S بتمماتها لا يغير من طبيعة المجموعة الناتجة S' . أي أنها تكون مولدة أيضاً.

3- كل مجموعة جزئية من جبر بولياني تحوي مجموعة مولدة هي نفسها مولدة.

4- : ليكن B جبراً بوليانياً يحوي 2^n عنصراً، وليكن q أصغر عدد صحيح يحقق الشرط $n \leq 2^q$ عندئذ يكون لدينا:

- كل مجموعة مولدة لـ B تحوي q عنصراً على الأقل.
- توجد على الأقل مجموعة مولدة مؤلفة من q عنصراً

15- الأساس في الجبر البولياني Base of Boolean Algebra

تعريف: الأساس في جبر بولياني هو مجموعة حرة ومولدة

مثال: ليكن الجبر البولياني $(p(E), \cap, \cup, -)$ حيث

$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \text{ إن المجموعة } S = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}\}$$

هي حرة ومولدة وبالتالي هي أساس للجبر $p(E)$ وكذلك المجموعة $\{\{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}\}$ هي أساس للجبر $p(E)$

خواص الأساس (تقبل بدون برهان):

- خاصة (1) إذا كان B جبراً بوليانياً عدد عناصره 2^n عندئذ يوجد لهذا الجبر أساس إذا وفقط إذا كان العدد n يكتب بالشكل $n = 2^p$ وفي هذه الحالة يكون p عدد عناصر أي أساس لهذا الجبر.
- خاصة (2): ليكن B جبر بوليانياً عدد عناصره 2^n حيث n هو عدد صحيح من الشكل $n = 2^p$ عندئذ يكون
1. كل مجموعة جزئية حرة مؤلفة من p عنصراً أساس لـ B .
 2. كل مجموعة جزئية مولدة من p عنصراً هي أساس لـ B .

مثال-1-

عين أساساً للجبر البولياني $(p(E), \cap, \cup, -)$ حيث $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

الحل: إن عدد عناصر $p(E)$ هو $2^{(2^2)} = 2^4$ ومن ثم فإن أي أساس لهذا الجبر يتكون من عنصرين . إن أي مجموعة جزئية $\{A, B\} \subset P(E)$ تكون أساس إذا وفقط إذا كانت مولدة ومن ثم يلزم و يكفي أن تتطابق الحدود الأصغرية الأربعة بـ A, B مع ذرات الجبر $p(E)$ الأربع ، أي يكون

$$\{A \cap B, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B, \bar{A} \cap \bar{B}\} = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}\}$$

بالمقارنة نجد:

$$A \cap B = \{x_1\}$$

$$A \cap \bar{B} = \{x_2\}$$

$$\bar{A} \cap B = \{x_3\}$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{x_4\}$$

مثال-2-

عين مجموعة مولدة أصغرية للجبر البولياني $(p(E), \cap, \cup, ^-)$ حيث $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$
الحل: إن عدد الجبر عناصر $p(E)$ هو 2^6 . العدد 6 ليس من الشكل 2^p وبالتالي لا يوجد أساس للجبر $p(E)$.
 ليكن p أصغر عدد صحيح يحقق المتراجحة $6 \leq 2^p$ أي $p = 3$. وبالتالي توجد على الأقل مجموعة مولدة مؤلفة من 3 عناصر. إذن المجموعة $\{A_1, A_2, A_3\}$ تكون مولدة إذا وفقط إذا كانت العناصر A_1, A_2, A_3 مختارة بحيث تكون الحدود الأصغرية بـ A_1, A_2, A_3 غير الخالية متطابقة مع ذرات الجبر $p(E)$ الست:

$$\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{x_1\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 = \{x_2\}$$

$$A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 = \{x_3\}$$

$$A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 = \{x_4\}$$

$$\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{x_5\}$$

$$\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 = \{x_6\}$$

$$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 = \Phi$$

$$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 = \Phi$$

فمثلاً إذا اعتبرنا:

$$A_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

وبالتالي تكون المجموعة $\{A_1, A_2, A_3\}$ حيث $A_2 = \{x_1, x_3, x_5\}$ مجموعة مولدة أصغرية للجبر

$$A_3 = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$$

البولياني $(p(E), \cap, \cup, ^-)$.

16- التوابع (الدوال) البوليانية Boolean Functions

تعريف: نسمي كل تطبيق من المجموعة $\{0,1\}^n$ إلى المجموعة $\{0,1\}$ تابعاً بوليانياً بـ n متحول ثنائي. حيث $\{0,1\}^n$ هو الجداء الديكارتي للمجموعة $\{0,1\}$ في نفسها n مرة.

أمثلة:

مثال(1): ليكن التطبيق

$$f: \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$$

$$(0,0) \rightarrow 0$$

$$(0,1) \rightarrow 1$$

$$(1,0) \rightarrow 1$$

$$(1,1) \rightarrow 0$$

هنا f تابع بولياني بمتحولين ثنائيين يعبر عنه بالشكل:

$$f: \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$$

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = \bar{x}.y + x\bar{y}$$

حيث $x, y, f(x, y)$ عناصر من الجبر البولياني $(\{0,1\}, +, \cdot, ^-)$

مثال(2): كل عبارة بوليانية بالعناصر $x_1, x_2, \dots, x_n$ من الجبر البولياني $(\{0,1\}, +, \cdot, ^-)$

تعرف تابعاً بوليانياً بـ n متحول ثنائي.

وبالتالي العبارة $\bar{x} + \bar{y}z$ تعرف تابعاً بوليانياً بثلاثة متحولات:

$$f: \{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$$

$$(x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) = \bar{x} + \bar{y}z$$

جدول الحقيقة التالي يبين القيم التي يأخذها هذا الدالة عند كل قيمة لمتحولاته

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	$\bar{0} + \bar{0}.0 = 1$
0	0	1	$\bar{0} + \bar{0}.1 = 1$
0	1	0	$\bar{0} + \bar{1}.0 = 1$
0	1	1	$\bar{0} + \bar{1}.1 = 1$
1	0	0	$\bar{1} + \bar{0}.0 = 0$
1	0	1	$\bar{1} + \bar{0}.1 = 1$
1	1	0	$\bar{1} + \bar{1}.0 = 0$
1	1	1	$\bar{1} + \bar{1}.1 = 0$

مثال (3): ليكن لدينا التابع البولياني $f(x, y) = \bar{x}.y + x$ إن جدول الحقيقة لهذا التابع هو:

x	y	$\bar{x}.y$	$f(x, y)$
1	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	0	0

مما سبق نجد أن لكل تابع بولياني جدول حقيقة واحد فقط، بينما يمكن أن نجد توابع بوليانية مختلفة في عباراتها ولكن لها نفس جدول الحقيقة.

تعريف: نقول عن تابعين بوليانيين f_1, f_2 متساويين (متكافئين) إذا كان لهما نفس جدول الحقيقة أو إذا استطعنا أن نحصل على أحدهما من الآخر باستخدام خواص الجبر البولياني.

مثال (1): أثبت أن $(x + y).(\bar{x} + y) = y$ بطريقتين مختلفتين.

1- باستخدام جداول الحقيقة:

x	y	$x + y$	$\bar{x} + y$	$(x + y).(\bar{x} + y)$
1	1	1	1	1

1	0	1	0	0
0	1	1	1	1
0	0	0	1	0

وبمقارنة العمود الثاني مع العمود الأخير نجد التابعين متساويين
2- باستخدام خواص الجبر البولياني:

$$\begin{aligned}
 & (x + y).(\bar{x} + y) \\
 &= (x.\bar{x}) + y \\
 &= 0 + y \\
 &= y
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب

مثال (2): أثبت أن $x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz = x(y + z)$ بطريقتين مختلفتين.

- 1- باستخدام جداول الحقيقة:
- 2- باستخدام خواص الجبر البولياني

الحل: (-1)

x	y	z	$x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$	$x(y + z)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

وبمقارنة العمود الرابع مع العمود الأخير (الخامس) نجد التابعين متساويين

(-2) باستخدام خواص الجبر البولياني:

$$\begin{aligned}
 x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz &= x(\bar{y}z + y\bar{z} + yz) \\
 &= x(\bar{y}z + y(\bar{z} + z)) \\
 &= x(\bar{y}z + y.1) \\
 &= x(\bar{y}z + y.1 + z.1) \\
 &= x.(\bar{y}z + y + z) \\
 &= x.(y + z)
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب

تعريف: نقول عن أساس للجبر البولياني $\{0,1\}^{2^n}$ انه قانوني اذا فقط اذا وجد تبديل $\{a'_1, a'_2, \dots, a'_n\}$ لعناصر هذا الأساس بحيث يكون:

$$\sum_{i=1}^n 2^{n-i} a'_i = (0,1,\dots, 2^n - 1)$$

العبارة البوليانية لدالة بولياني:

كل عبارة بوليانية بـ n متحول من $\{0,1\}$ تعرف تطبيقاً من $\{0,1\}^n$ إلى $\{0,1\}$ وبالعكس كل تطبيق f من $\{0,1\}^n$ إلى $\{0,1\}$ يكتب كعبارة بوليانية بعناصر من $\{0,1\}$

القاعدة التالية تمكننا من الحصول على عبارة التحليل القانوني الجمعي لتابع بولياني f مباشرة:

ليكن $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ أساساً للجبر البوليان $\{0,1\}^{2^n}$ و f تطبيقاً من $\{0,1\}^n$ إلى $\{0,1\}$ وإذا كان $f(a_1[i]..a_n[i]) = 1$ فإن الحد الأصغري m_j حيث:

$$j = \sum_{k=1}^n a_k[i] 2^{n-k}$$

هو أحد مكونات التحليل القانوني الجمعي لعبارة التابع البوليان f
مثال: ليكن f تابعاً بوليانياً بمتحولين معرفاً كما يلي :

$$f : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$$

$$(0,0) \rightarrow 0$$

$$(0,1) \rightarrow 1$$

$$(1,0) \rightarrow 1$$

$$(1,1) \rightarrow 1$$

الأساس القانوني للجبر $\{0,1\}^4$ هو $\{a, b\}$ حيث $a = (0,0,1,1)$ و $b = (0,1,0,1)$ وجدول القيم لهذا التابع هو:

الحدود الأصغرية	a	b	$f(a,b)$
m_0	0	0	0
m_1	0	1	1
m_2	1	0	1
m_3	1	1	1

باستخدام القاعدة السابقة نجد أن:

$$f(a,b) = m_1 + m_2 + m_3$$

$$= \bar{a}.b + a.\bar{b} + a.b = a + b$$

وإذا اخترنا أساساً للجبر $\{0,1\}^4$ مثل $\{a_1, a_2\}$

حيث $a_1 = (1,0,0,1)$ ، $a_2 = (1,1,0,0)$ يكون لدينا جدول القيم التالي:

الحدود الصغرى	a_1	a_2	$f(a_1, a_2)$
m_3	1	1	1
m_1	0	1	1
m_0	0	0	0
m_2	1	0	1

بتطبيق القاعدة السابقة نجد

$$f(a_1, a_2) = m_3 + m_1 + m_2 = a_1.a_2 + \bar{a}_1.a_2 + a_1.\bar{a}_2 = a_1 + a_2$$

في كلنا الحالتين نفس العبارة للتابع f نجدها:

$$f : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$$

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = \bar{x}.y + x.\bar{y} + x.y = x + y$$

$$x, y \in \{0, 1\}$$

حيث

من خلال مما سبق نلاحظ إن التعبير الأساس القانوني في الجبر البولياني $\{0, 1\}^{2^n}$ لا يغير شيئاً في عبارة تابع بولياني معرف على $\{0, 1\}^n$

17- دراسة التوابع البوليانية بعدة متحولات Multi-variable Boolean Functions

ترقيم التوابع البوليانية: يوجد 2^{2^n} تابعاً بوليانياً بـ n متحول ثنائي وهذا العدد يزداد مع تزايد قيمة n فمثلاً

$$2^{2^2} = 16 \quad \text{إذا كانت } n = 2 \text{ فإن}$$

$$2^{2^3} = 256 \quad \text{إذا كانت } n = 3 \text{ فإن}$$

$$2^{2^4} = 65536 \quad \text{إذا كانت } n = 4 \text{ فإن}$$

وهكذا فإننا نحتاج إلى نظام ترقيم لهذه التوابع.

أمثلة:

$$f_i = x.y.z + \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.y.\bar{z} + x.\bar{y}.\bar{z} \quad \text{مثال (1) ليكن}$$

$$= m_6 + m_4 + m_3 + m_0$$

الدليل i هو الرقم الذي يميز هذا التابع في مجموعة التوابع البوليانية بثلاثة متحولات والبالغ عددها 256 .
يحسب دليل الترقيم i من عبارة التحليل القانوني الجمعي للتابع وذلك كما يلي:

$$f_i(x, y, z) = \sum_{j \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}} m_j \quad \text{نفرض أن:}$$

$$i = \sum 2^j \quad \text{عندها نأخذ}$$

$$j \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$$

$$0 \leq i \leq 255 \quad n = 3 \quad \text{نجد أن}$$

مثال: الكتابة $f_{25633}(x, y, z, t)$ تمثل حسب قاعدة الترقيم السابقة، تابعاً بوليانياً بأربع متحولات هو:

$$f_{25633}(x, y, z, t) = m_{14} + m_{13} + m_{10} + m_5 + m_0$$

$$= xyz t + \bar{x} \bar{y} z t + \bar{x} \bar{y} z \bar{t} + \bar{x} y \bar{z} t + \bar{x} y \bar{z} \bar{t}$$

وذلك لأن العدد 25633 يكتب كما يلي:

$$(25633)_{10} = (110010000100001)_2 = 2^{14} + 2^{13} + 2^{10} + 2^5 + 2^0$$

ملاحظة : أيًا كانت قيمة $n \geq 1$ فإن

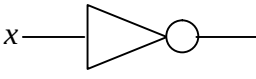
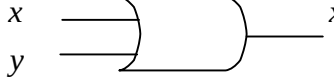
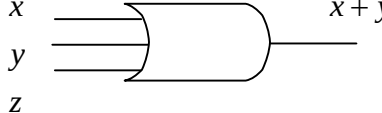
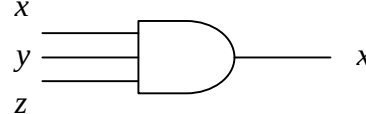
$$f_0(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \equiv 0$$

$$f_{2^{2^n} - 1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \equiv 1$$

18- تمثيل التوابع البوليانية بمخططات منطقية Logical Gates

يمكن تمثيل تابع بولياني ما بمخطط منطقي يحاكي عمل البوابات المنطقية والبوابة هي تمثيل رمزي لتابع بولياني بسيط، وهذه البوابات يمكن تحقيقها صناعياً كعناصر الكترونية، ومن ثم تجميعها وفق مخطط منطقي لتكون دائرة منطقية (دخل البوابة المنطقية من اليسار وخرجها من اليمين دوماً).

الشكل العام لرسم البوابات وتمثيلها:

البوابة	الدخل	التمثيل
NON	وحيد	
OR	ثنائي	
AND	ثنائي	
OR	ثلاثي	
AND	ثلاثي	

التوابع البوليانية بمتحول واحد One - Variable Boolean Functions

التوابع البوليانية بمتحول واحد أربعة، يرمز لها بـ:

$$f_0, f_1, f_2, f_3$$

وذلك حسب قاعدة الترفيم لتمييز هذه التوابع بعضها من بعض عندما تكون $s = \{a\}$ أساساً للجبر $\{0,1\}^2$ فإن كل تابع من التوابع البوليانية الأربعة يوافق عنصراً من الجبر $\{0,1\}^2 = G(a)$:

$$G(a) = \{0, a, \bar{a}, 1\} = \{0,1\}^2$$

التابع $f_0(x) = 0$ يسمى التابع الثابت الصفري

التابع $f_1(x) = \bar{x}$ يسمى التابع المتمم NoN

التابع $f_2(x) = x$ يسمى التابع المطابق

التابع $f_3(x) = 1$ يسمى التابع الثابت الواحدي

التوابع البوليانية بمتحولين Two - Variable Boolean Functions

التوابع البوليانية بمتحولين ست عشرة معرفة على $\{0,1\}^2$ ويرمز لها بـ $f_0, f_1, \dots, f_{15}$

وعندما تكون $s = \{a, b\}$ أساساً للجبر $\{0,1\}^4$ فإن كل تابع f_i حيث $(0 \leq i \leq 15)$

يوافق عنصراً من الجبر $\{0,1\}^4 = G(a, b)$ حيث

$$G(a, b) = \{0, a, b, \bar{a}, \bar{b}, ab, \bar{a}b, a\bar{b}, \bar{a}\bar{b}, a+b, a+\bar{b}, \bar{a}+b, \bar{a}+\bar{b}, ab+\bar{a}b, a\bar{b}+\bar{a}\bar{b}, 1\}$$

فكل تابع بولياني بمتحولين يعرف عملية ثنائية في الجبر البولياني.

يوضح الجدول التالي بعض تسميات التوابع البوليانية الشهيرة بمتحولين مع بعض الرموز العملياتية:

الرموز العملياتية	التسمية	التابع
-	ثابت صفري	$f_0(x, y) = 0$

$a \downarrow b = \bar{a} \bar{b} = \overline{a + b}$	NOR	$f_1(x, y) = \bar{x} \bar{y}$
-	-	$f_2(x, y) = \bar{x} y$
-	نفي	$f_3(x, y) = \bar{x}$
-	-	$f_4(x, y) = x \bar{y}$
-	نفي	$f_5(x, y) = \bar{y}$
$a + b = \bar{a} \bar{b} + \bar{a} b$	XOR	$f_6(x, y) = x \bar{y} + \bar{x} y$
$a \uparrow b = \bar{a} + \bar{b} = \overline{a.b}$	NAND	$f_7(x, y) = \bar{x} + \bar{y}$
$a.b = ab$	الضرب، AND	$f_8(x, y) = xy$
$a \leftrightarrow b = ab + \bar{a} \bar{b}$	تكافؤ	$f_9(x, y) = xy + \bar{x} \bar{y}$
-	-	$f_{10}(x, y) = y$
$a \rightarrow b = \bar{a} + b$	اقتضاء	$f_{11}(x, y) = \bar{x} + y$
-	-	$f_{12}(x, y) = x$
$a \leftarrow b = a + \bar{b}$	اقتضاء	$f_{13}(x, y) = x + \bar{y}$
$a + b$	الجمع، OR	$f_{14}(x, y) = x + y$
-	ثابت واحد	$f_{15}(x, y) = 1$

ثنوية تابع بولياني:

تعريف: ليكن f تابعاً بوليانياً بـ n متحولاً ثنائياً. نعرف التابع البولياني الثنوي لـ f ونرمز له بـ f^* بالعلاقة

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

مثال(1): التابع الثنوي البولياني $f(x, y) = x + xy$ هو $f^*(x, y) = \bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{y}$

مثال(2): التابع الثنوي للتابع البولياني $g(x, y, z) = (1 + x) \cdot \bar{y} \cdot z$ هو التابع $g^*(x, y, z) = \bar{y} + z$

خواص:

خاصة(1): إن التابع الثنوي لثنوي تابع بولياني بـ n متحول ثنائي يساوي هذا التابع أي: $(f^*)^* = f$

خاصة(2): يتساوى تابعان بوليانيان بـ n متحول ثنائي إذا وفقط إذا تساوى تابعهما الثنويان: أي

$$f = g \Leftrightarrow f^* = g^*$$

التوابع البوليانية ذاتية الثنوية Self-Dual Boolean Functions

تعريف: نقول عن تابع بولياني f إنه ذاتي الثنوية إذا تحقق: $f = f^*$

أثبت أن التابع $f(x, y, z) = x.y + y.z + z.x$ إنه ذاتي الثنوية.

الحل:

$$\begin{aligned} f^*(x, y, z) &= (x + y) \cdot (y + z) \cdot (z + x) \\ &= (y + x.z) \cdot (z + x) \\ &= x.y + y.z + z.x \end{aligned}$$

Symmetric Boolean Functions المتناظرة البوليانية

تعريف: نقول عن تابع بولياني f بـ n متحولاً ثنائياً $x_1, x_2, \dots, x_n$ إنه متناظر بالنسبة إلى متحولاته إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: من أجل أي تبديل $i_1, i_2, \dots, i_n$ للأدلة $1, 2, \dots, n$ فإن $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(i_1, i_2, \dots, i_n)$ أمثلة:

مثال -1: التابع $f(x, y, z) = x.y + y.z + z.x$ هو تابع متناظر بالنسبة للمتحويلات x, y, z

الحل: إن $f(x, y, z) = f(x, z, y) = f(y, x, z) = f(y, z, x) = f(z, x, y) = f(z, y, x)$

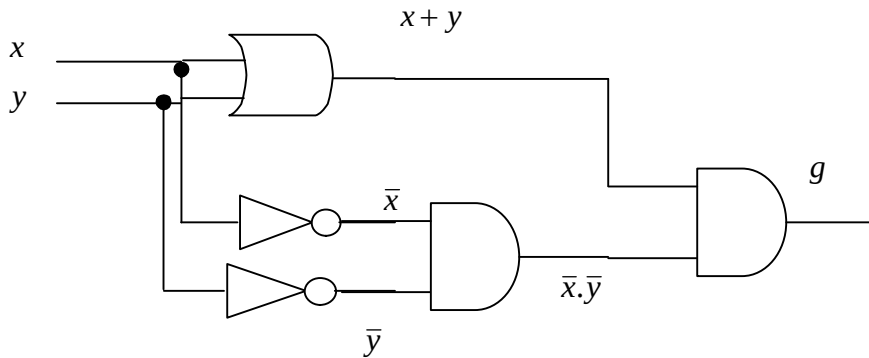
مثال -2: التابع $f(x, y) = x.\bar{y} + y$ هو تابع متناظر بالنسبة للمتحولين x, y

الحل: إن $f(x, y) = x\bar{y} + y = x + y = x + \bar{x}y = f(y, x)$

مثال : ليكن $g = (x + y).(\bar{x}.\bar{y})$ تابعاً بوليانياً فالمطلوب ارسـم الدارة المنطقية للتابع البولياني g

الحل: جدول الحقيقة للتابع السابق:

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x + y$	$\bar{x}.\bar{y}$	$g = (x + y).(\bar{x}.\bar{y})$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0



يمكننا تجريب الدخل بقيم x و y والتأكد من الخرج حسب الدارة المنطقية وهي مطابقة لجدول الحقيقة.

ملاحظة: يمكن تمثيل العبارات المنطقية بدارات منطقية حيث نستعمل النفي $\neg$ بدلاً من المتمم والاجتماع $\vee$ بدلاً من الجمع $+$ والتقاطع $\wedge$ بدلاً من الضرب $(.)$ الصحيح (True) بدلاً من 1 و الخطأ (False) بدلاً من 0 والعكس صحيح، فمثلاً التابع $g = (x + y).(\bar{x}.\bar{y})$ يكافئ العبارة المنطقية $P = (x \vee y).(\neg x \wedge \neg y)$.

19- التوابع البوليانية التامة (المؤثرات المنطقية التامة) Entire Boolean Functions

تعريف: نقول عن مجموعة من التوابع البوليانية بواحد أو أكثر من المتحولات إنها تامة عندما يمكن التعبير بواسطة هذه التوابع عن العمليات الأساسية في الجبر البولياني:

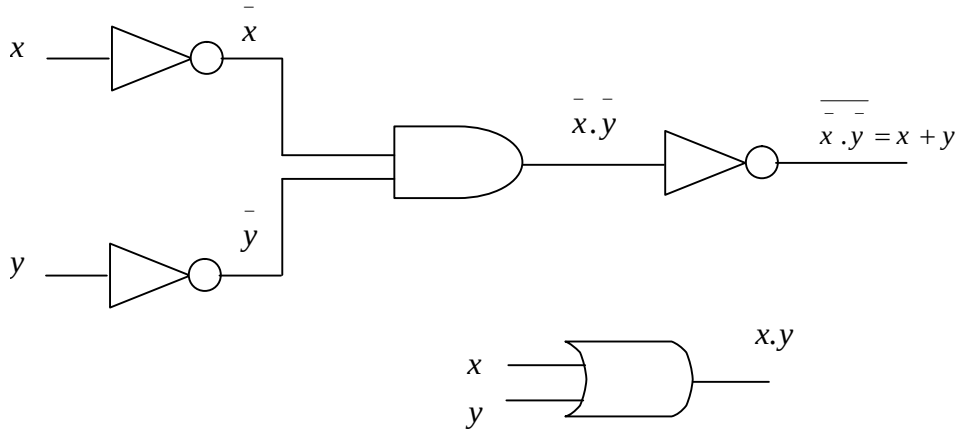
- الجمع والضرب (توابع بمتحولين).
- المتمم (تابع بمتحول واحد).

أمثلة:

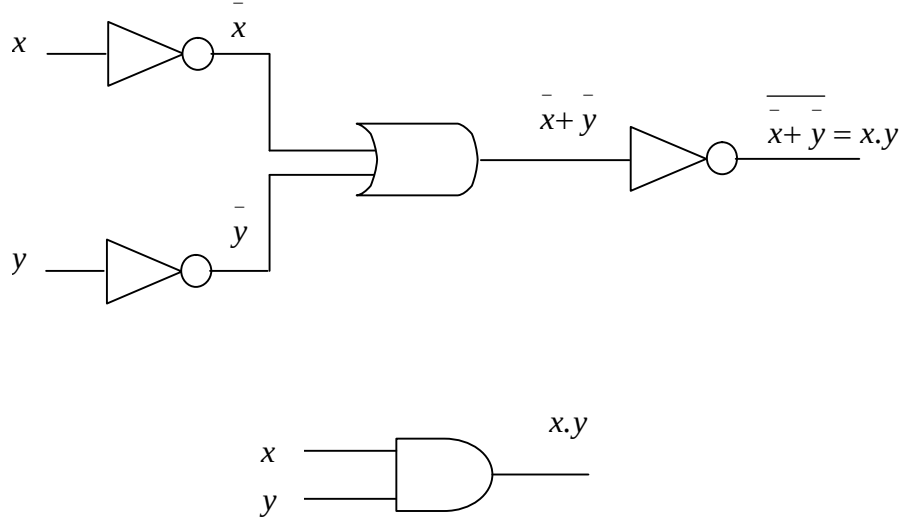
1- إن المجموعة المكونة من المؤثر المنطقي AND والمؤثر NON هي مجموعة هي مجموعة تامة. لأننا نستطيع التعبير عن المؤثر المنطقي OR فقط باستخدام لهذين المؤثرين كما يلي:

جدول الحقيقة:

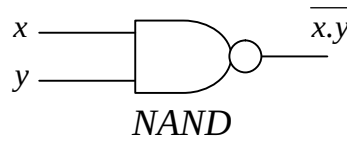
x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}.\bar{y}$	$\overline{\bar{x}.\bar{y}}$	$x + y$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0



2- إن المجموعة المكونة من المؤثر المنطقي OR والمؤثر المنطقي NON هي مجموعة تامة لأننا نستطيع التعبير عن المؤثر المنطقي AND فقط باستخدام لهذين المؤثرين كما يلي:

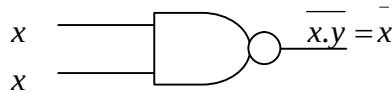


3- المؤثر NAND يعبر عنه بدلالة المؤثرين AND و NON كما يلي:

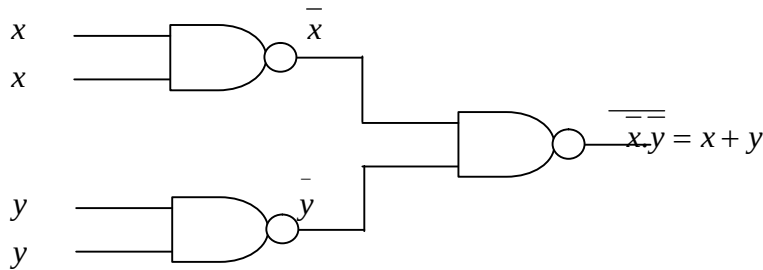


حيث: $x \uparrow y = \bar{x} + \bar{y} = \overline{x.y}$

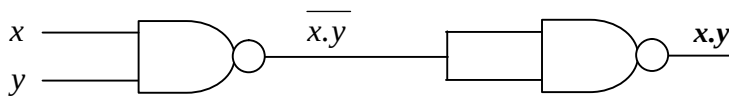
يكون المؤثر NAND بمفرده جملة منطقية تامة لأنه يسمح بتحقيق المؤثرات الأساسية في الجبر البولياني OR و AND و NON كما يلي:
تحقيق المؤثر NON



تحقيق المؤثر OR



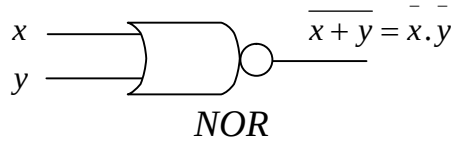
تحقيق المؤثر AND



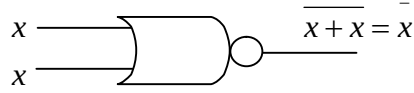
4- المؤثر NOR يكون بمفرده جملة منطقية تامة. ويعبر عنه بالشكل:

$$x \downarrow y = \bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x + y}$$

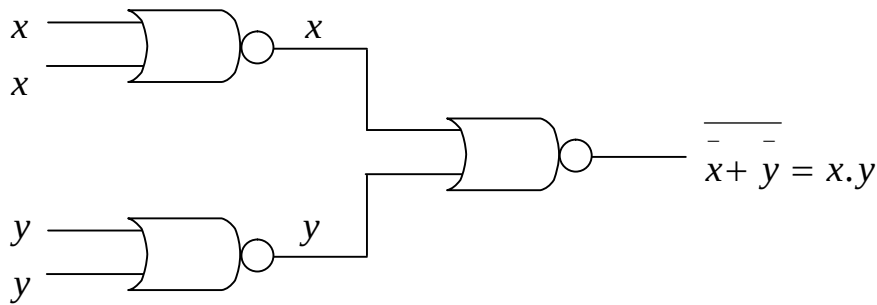
ويمثل بالمخطط الرمزي التالي:



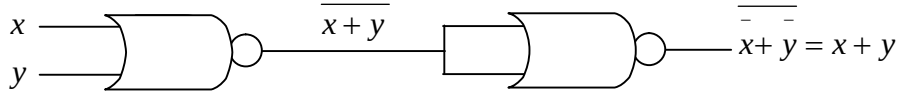
تحقيق المؤثر NON



تحقيق المؤثر AND



تحقيق المؤثر OR



ملاحظة: المؤثران $NAND$ و NOR ثنويان أحدهما لآخر وهما الوحيدان من بين كل التوابع البوليانية بمتحولين اللذان كل بمفرده جملة منطقية تامة بالإضافة لذلك، هما قابلان للتحقيق الفعلي ويستخدمان في قطاعات تكنولوجية مختلفة مثل: الالكترونيات، الأتمتة، وغيرها.

تمارين

تمرين(1): لتكن a, b, c ثلاثة عناصر من جبر بولياني . أثبت صحة المساويات التالية و اكتب ثنوية كل منها:

1. $a(b + c) = abc + a\bar{b}c + ab\bar{c}$
2. $ab + bc + ca = (a + b)(b + c)(c + a)$
3. $abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} = a$

تمرين(2): لتكن a, b, c, d أربعة عناصر من جبر بولياني . بسط العبارات البوليانية واكتبها على الشكل المذكور بجانب كل منها:

مجموع حدود بسيطة
جداء مجموعي حدود بسيطة
جداء مجموعي حدود بسيطة

1. $a\bar{c} + \overline{(a + \bar{b} + \bar{c})(\bar{a} + \bar{c} + b)} + a\bar{b}(\bar{a} + \bar{c})$
2. $a\bar{b} + a\bar{c} + b\bar{a} + b\bar{c} + c\bar{a} + c\bar{b}$
3. $a + bd + c(a + d)$

تمرين(3): لتكن a, b, c ثلاثة عناصر من جبر بولياني . وليكن $e = ab + \bar{c}$, $f = \overline{a+b.(c+\bar{a})}$ و المطلوب :

1. اكتب f , e كمجموع حدود أصغرية بالعناصر a, b, c
2. اكتب $\bar{f}$, $\bar{e}$ كمجموع حدود أصغرية بالعناصر a, b, c

تمرين(4): لتكن لدينا العبارتان البوليانيتان التاليتان:

$$f(a, b, c, d) = ab\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + ab\bar{c}d + bcd$$

$$g(a, b, c, d) = (a + b)(a + c)\bar{d}$$

اكتب العبارتين $f(a, b, c, d)$ و $g(a, b, c, d)$ كمجموع حدود أصغرية مختلفة و استنتج المساواة :
 $f(a, b, c, d) = g(a, b, c, d)$

تمرين(5): لتكن a, b, c ثلاثة عناصر من جبر بولياني . و لتكن لدينا العبارة البوليانية التالية:

$$e = \bar{a}b + \bar{b}\bar{c} \quad \text{أثبت أن} \quad e = \bar{a}.(b + c) + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$$

تمرين(6): عين كل الجبور الجزئية من الجبر البولياني $(P(E), \cup, \cap, -)$ حيث $E = \{x_1, x_2, x_3\}$

تمرين(7): أثبت أن تقاطع جبرين بوليانيين جزئيين من جبر بولياني هو جبر بولياني جزئي

تمرين(8): ليكن A, B عنصرين من $P(E)$ ، وليكن $g = \overline{B \cap A \cup A \cup B}$ و المطلوب:

1. أي عنصر من عناصر $G(A, B)$ الستة عشرة يساوي g ؟
2. إذا كان $\bar{A} \subset B$ ما هو العنصر g في هذه الحالة ؟

تمرين(9): لتكن a, b, c, d, e خمسة عناصر من جبر بولياني B . عين التحليل القانوني الجمعي و التحليل القانوني الضربي لكل العبارات التالية:

$$1-) f(a, b) = (a + b).\bar{a}\bar{b}$$

$$2-) f(a, b, c) = \overline{abc} + \bar{a}b$$

$$3-) f(a, b, c) = \overline{(a + b + c)(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})}$$

$$4-) f(a, b, c, d) = abcd + a\bar{d} + a\bar{b}\bar{c} + ab\bar{d}$$

$$5-) f(a, b, c, d, e) = b\bar{c}d + \bar{a}d + \bar{c}e + ab\bar{c}d + \bar{a}$$

تمرين(10): لتكن $\{a, b\}$ مجموعة حرة من جبر بولياني B . وليكن

$$G(a, b) = \{0, 1, a, b, \bar{a}, \bar{b}, ab, a\bar{b}, \bar{a}b, \bar{a}\bar{b},$$

$$a + b, a + \bar{b}, \bar{a} + b, \bar{a} + \bar{b}, \bar{a}b + a\bar{b}, ab + \bar{a}\bar{b}\}$$

هل المجموعات التالية حرة أم لا ؟

$$S_1 = \{ab, a + b\}$$

$$S_2 = \{\bar{a}, \bar{b}\}$$

$$S_3 = \{a\bar{b} + \bar{a}b, ab + \bar{a}\bar{b}\}$$

تمرين(11): ليكن f تابعا بوليانيا بثلاثة متحولات معرف بالجدول التالية:

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

والمطلوب:

1. اكتب عبارة التحليل القانوني الجمعي للتابع f .
2. بسط عبارة التابع f كمجموع حدود يتألف كل منها من حدين بسيطين.
3. هل التابع متناظر بالنسبة إلى متحولاته؟
4. أثبت أن f ذاتي الثنوية.

تمرين(12): ليكن التابع البولياني التالي: $f(x, y, z) = y.z + z.x + x.y.\bar{z} + \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$ و المطلوب:

1. أوجد التحليل القانوني الجمعي للتابع f
2. برهن أن التابع متناظر بالنسبة إلى متحولاته الثلاثة.
3. بسط عبارة التابع f واكتبها بالشكل $\Sigma\Pi$
4. ارسم مخططا بيانيا يمثل $f(x, y, z)$ مستخدما فقط بوابات من نوع: AND, OR, NON.
5. عين f^*

تمرين(13): ليكن f تابعا بوليانيا بأربع متحولات معرف بالعلاقة: $f(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{14} m_i$ و المطلوب:

1. احسب $\overline{f(x, y, z, t)}$ ثم أثبت أن $f^* = \bar{f}$ واستنتج أن $f(x, y, z, t) = \bar{x}y + \bar{x}z + \bar{x}t + \bar{y}x + \bar{y}z + \bar{y}t + \bar{z}x + \bar{z}y + \bar{z}t + \bar{t}x + \bar{t}y + \bar{t}z$
2. أثبت أن $f(x, y, z, t)$ متناظر و استنتج أن $f(x, y, z, t) = y\bar{t} + z\bar{x} + \bar{y}x + \bar{z}t$

تمرين(14): صمم دائرة منطقية حيث تكون القيمة المخرجة هي التوابع البوليانية المعطاة:

$$f = x(y + z) + \bar{x} + \bar{y} \quad -1$$

$$h = x\bar{y}z + \bar{x} + \bar{y} + \bar{z} \quad -2$$